www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Université d'Orléans ECOLE SUPERIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATERIAUX

CONCOURS 1989 - Option Spéciales M,M',P,P',T,T', TA

MATHEMATIQUES (Durée 4 h - Coefficient 4)

Chaque candidat doit traiter deux problèmes :

- Le problème A et le problème B pour les candidats des options M, M', P, P', T' ;

- Le problème A et le problème C pour les candidats des options T, TA.

Il est demandé aux candidats de faire figurer très lisiblement sur leurs copies la lettre du problème traité et de respecter l'ordre des questions à l'intérieur de chaque problème.

La clarté et la précision des réponses ainsi que le soin apporté à la présentation des résultats seront des éléments importants d'appréciation.

PROBLEME A (Toutes options)

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension trois, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, et I l'application identique de E dans E. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f^2$.

I. Dans cette partie, f désigne un endomorphisme de E et λ un scalaire réel fixé. On pose $g = f - \lambda I$ et on suppose que g vérifie $g^3(x) = 0$ pour tout $x \in E$.

1) a) Peut-on avoir $\ker g = \{0\}$? Que peut-on dire de λ pour f ?

b) Montrer que $\ker g \subset \ker g^2 \subset \ker g^3 = E$.

c) Montrer que si $\ker g = \ker g^2$ alors $E = \ker g \oplus \operatorname{Im} g$.

d) On suppose que $\ker g$ est de dimension 1 et on veut montrer que $\ker g^2$ est de dimension 2.

- Montrer que si $\ker g^2$ est de dimension 1 alors $E = \ker g \oplus \operatorname{Im} g$ et en déduire une contradiction.
- Montrer que si $\ker g^2$ est de dimension 3 alors $\operatorname{Im} g \subset \ker g$ et en déduire une contradiction.
- Conclure.

e) Montrer que si $\ker g$ est de dimension 2 alors g^2 est nulle.

2) On suppose que $\ker g^2 \neq E$. Que peut-on dire du rang de g ? Du rang de g^2 ? Soit $w \in E$ tel que $w \notin \ker g^2$. On pose $v = g(w)$ et $u = g(v)$. Montrer que (u,v,w) est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

II. On désigne par (e_1, e_2, e_3) une base de E et on appelle f l'endomorphisme de E de matrice dans cette base

$$M = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t & 1 & 1 + \cos 4t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

On pose $g = f - I$.

1) Calculer le polynôme caractéristique de f. Cette application est-elle diagonalisable ? (Justifier votre réponse).

2) On pose $w = e_2$, $v = g(w)$, $u = g(v)$. Calculer v et u et montrer que (u,v,w) est une base de E. Prouver que g(u) est nul et en déduire que g^3 est l'application nulle.

3) Montrer que la matrice de f dans (u,v,w) est $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Préciser la matrice de passage P de (e_1,e_2,e_3) vers (u,v,w) ainsi que P^{-1}.

4) Calculer J^n puis M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) On munit l'espace $M_3(\mathbb{R})$ des matrices (3,3) à coefficients réels d'une norme et, pour $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

On admettra que (A_n) possède une limite quand n tend vers $+\infty$, que l'on note exp(A) (le coefficient en position (i,j) de exp(A) est limite dans $\mathbb{R}$ du coefficient correspondant de A_n).

Calculer exp(J) et justifier que $\exp(M) = P\{\exp(J)\}P^{-1}$ (on ne calculera pas explicitement exp(M).

Tournez la page S.V.P.

page 270
1989 1
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE de l'ENERGIE
et des MATERIAUX d'ORLEANS
Spéciales

PROBLEME B (Candidats des options M, M', P, P', T')

Dans tout ce problème, E désigne l'espace vectoriel (réel) des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

I. 1) Etablir la continuité de l'application k définie sur $[0,1]^2$ par

$$k(x,t) = \sup (x-t, 0).$$

2) Soit $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls). Pour tout x de $[0,1]$ on pose $g_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$.

Etablir la continuité de g_n sur $[0,1]$.

3) Etudier l'existence et la continuité de $\frac{\partial k}{\partial x}$ sur $[0,1]^2$. Quelle conclusion peut-on tirer quant à la dérivabilité de g_n ?

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$. Etudier la dérivabilité de l'application suivante sur $[0,1]$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$

$$h_i : x \longmapsto x^i \int_0^x (-t)^{n-i} f(t)\, dt.$$

b) Montrer que g_n définie en 2) est (n+1) fois continûment dérivable sur $[0,1]$ (on établira, pour $0 \leqslant p \leqslant n$, la formule

$$g_n^{(p)}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-p}}{(n-p)!} f(t)\, dt \ ).$$

II. 1) On reprend les notations de I.2) et on pose $\varphi_n(f) = g_n$. Montrer que φ_n est linéaire et continue de E dans E (c'est-à-dire qu'il existe une constante C_n telle que, quelle que soit $f \in E$, on ait : $\|\varphi_n(f)\|_\infty \leqslant C_n \|f\|_\infty$).

2) On se propose de déterminer les valeurs propres de φ_n (s'il en existe), c'est-à-dire les réels λ pour lesquels il existe une application f de E, non nulle, telle que $\varphi_n(f) = \lambda f$ (f est alors appelée vecteur propre associé à la valeur propre λ).

a) Montrer que φ_n est injective.

b) En supposant que $\lambda \neq 0$ soit valeur propre de φ_n, soit f un vecteur propre associé. Montrer que f vérifie une équation différentielle d'ordre (n+1) dont on précisera les conditions initiales, puis conclure.

III. Soit k_1 l'application continue de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$k_1(x,t) = 1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$$

$$k_1(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad t > x$$

et K l'application définie sur E par $f \longmapsto K(f)$ où

$$K(f)(x) = \int_0^1 k_1(x,t) f(t)\, dt.$$

1) Montrer que K est linéaire et continue de E dans E et déterminer sa norme (c'est-à-dire le réel $\sup \{\|K(f)\|_\infty : \|f\|_\infty \leqslant 1\}$).

2) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on définit par récurrence une application sur $[0,1]^2$ en posant $k_n(x,t) = \int_0^1 k_1(x,u)\, k_{n-1}(u,t)\, du$.

a) Démontrer que k_n est continue sur $[0,1]^2$ et qu'elle est associée à K^n (composée n fois de K) par la formule

$$K^n(f)(x) = \int_0^1 k_n(x,t) f(t)\, dt.$$

b) Calculer $k_n(x,t)$ pour tout $n \geqslant 2$ (on vérifiera en particulier que $k_2 = k$ introduit dans I.)

3) Démontrer que, pour tout $f \in E$, la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} K^n f$ converge uniformément dans E et vérifier l'égalité

$$(I-K)\left(\sum_{n=0}^{\infty} K^n f\right) = f$$

(I désigne l'identité de E dans E).

4) Soit $f \in E$. Démontrer que l'équation $(I-K)(g) = f$ admet pour solution dans E l'application g définie par

$$g(x) = f(x) + \int_0^x e^{(x-t)} f(t)\, dt.$$

Tournez la page S.V.P.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'ENERGIE
EL DES MATERIAUX D'ORLEANS
SPECIALES

PROBLEME C (Candidats des options T, TA)

On note tan la fonction tangente, $\mathbb{N}$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des entiers naturels (respectivement des entiers naturels non nuls) et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

I. 1) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan t = t$ admet une et une seule solution t_n dans l'intervalle : $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$.

2) a) On pose $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - t_n$, pour tout $n \geqslant 1$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a pour limite 0.

b) En déduire un développement limité de u_n par rapport aux puissances de $\frac{1}{n}$, à l'ordre 2.

c) Déterminer les réels α tels que $\sum_{n\geqslant 1} (t_n)^\alpha$ converge.

3) On se propose de calculer une valeur approchée de t_1 par la méthode de Newton, en posant $f(t) = \tan t - t$.

a) Démontrer, pour tout x de I_1 distinct de t_1, l'inégalité $\frac{f(x)}{f'(x)} < x - t_1$.

b) Soit x_0 fixé dans $]t_1, \frac{3\pi}{2}[$. On définit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, minorée et convergente vers t_1.

c) Soit u un point de $]\pi, t_1[$. Démontrer, pour tout n, les inégalités

$$0 < x_n - t_1 < \frac{f(x_n)}{f'(t_1)} < \frac{f(x_n)}{u^2}.$$

En déduire une valeur approchée de t_1 à 10^{-6} près en prenant $u = 4$ et $x_0 = 4{,}50$ (on donnera tous les termes x_n calculés).

d) Soit x_0 fixé dans $]\pi, t_1[$. Montrer qu'alors $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > t_1$

Cette condition suffit-elle pour appliquer la méthode du b) ?

II. Dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on note (H) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = \frac{1}{t}, \quad (t > 0)$$

tracée sur un cylindre de révolution (C) d'axe la droite $(0;\vec{k})$;
(P) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$.

A tout point M(x,y,z) de (C), on associe le point M'(x',y',z'), intersection de (P) et de la droite (OM). On définit ainsi une application f d'une partie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ en posant $(x',y',z') = f(x,y,z)$.

1) Définir un paramétrage $t \longmapsto (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$ de la courbe (K), image de (H) par f.

2) Soit (L) la projection orthogonale de (K) sur le plan $(0;\vec{j},\vec{k})$.

a) Donner le tableau des variations de la fonction $t \longmapsto y_1(t)$ pour $t \in I_{2n-1}$, puis pour $t \in I_{2n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (les notations sont celles du I.).

b) Etudier la courbe (L) et la représenter pour $0 < t \leqslant \frac{5\pi}{2}$.

III- Pour a réel non nul soit g_a l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_a(x,y,z) = \cos(a(x+y+z))$.

1) Déterminer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, les extrema de $(g_a)^n$ (puissance $n^{ième}$ pour la multiplication des applications).

2) Soit (B) la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne. En effectuant un changement de repère orthonormé, démontrer la formule

$$J_a = \iiint_{(B)} g_a(x,y,z)\,dxdydz = \pi \int_{-1}^{1} (1-Z^2)\cos(aZ)\,dZ.$$

et calculer J_a.

3) Montrer que l'application T définie par $T(a) = J_a$ admet un et un seul zéro dans chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer le signe de la restriction de T aux réels positifs.

4) Montrer que l'application définie sur les réels positifs par

$\varphi(x) = x^{3/2} J_x$ vérifie l'équation différentielle

$$\varphi''(x) + \frac{1}{x}\varphi'(x) + (1 - \frac{9}{4x^2})\varphi(x) = 0.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail